Пловдивски университет „Паисий Хилендарски”
Факултет по математика и информатика
Катедра “Приложна математика и моделиране”

“Компютърни числени методи”
ЛЕКЦИЯ 4

Проф. д-р Снежана Гочева-Илиева, snow@uni-plovdiv.bg

Он-лайн обучение: www.fmi-plovdiv.org/evlm
www.fmi-plovdiv.org/evlm/DBbg - числени методи

Литература:

1. Бояджиев Д., Гочева С., Макрелов И., Попова Л. – Ръководство по числени методи – част 1, Издания: 2003, 2006, 2010.
2. Семерджиев Х., Боянов Б., Числени методи, ПУ.
3. Гочева-Илиева С., Въведение в система Mathematica, ЕксПрес, Габрово, 2009.

Съдържание

Числени методи за решаване на системи уравнения-продължение

1. Норми на вектори и матрици

Разглеждаме n-мерното векторно пространство R^n, т.е. $x \in R^n$: $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Определение 1. Казваме, че в R^n е дефинирана норма $\|\cdot\|$, ако на всяко $x \in R^n$ е съпоставено реално число $\|x\|$, такова че:

1⁰) $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2⁰) $\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|$, за всяко $x \in R^n$, λ - произволно реално число;

3⁰) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in R^n$ - неравенство на триъгълника.

Забележка. Едно нормирано пространство лесно става метрично, ако се въведе разстояние (метрика) $d(x, y) = \|x - y\|$.

Определение 2. Две норми $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ в R^n са еквивалентни, ако съществуват числата $m > 0, M > 0$, така че за всяко $x \in R^n$:

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 . \tag{20}$$

Теорема. Всеки две норми в R^n са еквивалентни.

Най-разпространените норми на вектор в R^n са:

$\| x \|_1 = \max\limits_{i=1,n} |x_i|$, (кубична или чебишева норма),

$\| x \|_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$, $\quad \| x \|_3 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{(x, x)}$ (евклидова). (21)

Задача 1. Да се докаже, че $\| x \|_1$ е норма.

Решение: 1^0) От свойствата на модула $|x_i| \geq 0$ и от $|x_i| = 0$ следва $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Тогава и за максимума е изпълнено същото. 2^0) Нека λ е произволно реално число. От определението (21) и свойствата на модул $\| \lambda x \|_1 = \max\limits_{i=1,n} |\lambda x_i| = |\lambda| \max\limits_{i=1,n} |x_i| = |\lambda| \| x \|_1$. 3^0) Пак от свойствата на модула и неравенството за сума на модули имаме:

$\| x + y \|_1 = \max\limits_{i=1,n} |x_i + y_i| \leq \max\limits_{i=1,n} |x_i| + \max\limits_{i=1,n} |y_i| = \| x \|_1 + \| y \|_1$.

Задача 2. За упражнение докажете, че $\| x \|_2$ е норма.

Задача 3. Намерете трите норми на вектора $a=(-2,3,1,0,-5)$.

Решение: Тук $n=5$. По определението:

$$\| a \|_1 = \max_{i=\overline{1,5}} |a_i| = \max\{|-2|,|3|,|1|,|0|,|-5|\} = 5,$$

$$\| a \|_2 = \sum_i^5 |a_i| = |-2|+|3|+|1|+|0|+|-5| = 2+3+1+0+5 = 11,$$

$$\| a \|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^5 a_i^2} = \sqrt{(-2)^2+3^2+1^2+0+(-5)^2} = \sqrt{4+9+1+25} = \sqrt{39} \approx 6.25.$$

Задача 4. Покажете, че втора норма е съгласувана с първа.

Решение: Да означим индекса на максималния по модул компонент на вектора x с $i*$. Тогава очевидно:

$\|x\|_1 = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i| = |x_{i*}| \le \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_2 \le \sum_{i=1}^n |x_{i*}| = n|x_{i*}| = n\|x\|_1$. За $m=1, M=n$ имаме (20).

Определение 3. Казваме, че е дефинирана норма на матрица $\|\cdot\|$, ако на всяка матрица от числа A с размерност $n \times n$ е съпоставено реално число $\| A \|$, такова че:

1^0) $\| A \| \geq 0$ и $\| A \| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;

2^0) $\| \lambda A \| = |\lambda| . \| A \|$, λ - произволно число;

3^0) $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$, $\forall\ A, B$ - неравенство на триъгълника,

4^0) $\| A.B \| \leq \| A \| . \| B \|$ за $\forall\ A, B$.

Определение 4. Казваме, че нормата на вектор и нормата на матрица за дадено *n* са съгласувани, ако е в сила $\|Ax\| \leq \| A \| . \|x\|$.

Съгласуваната норма на матрица се определя от равенството: $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Най-разпространените норми на матрици са:

$$\| A \|_1 = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \| A \|_2 = \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \| A \|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \,. \qquad (22)$$

Задача 1. Да се изчислят нормите на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. За първа норма $\| A \|_1$ събираме модулите на елементите по редове: $i = 1: \sum_{j=1}^{4} |a_{1j}| = |5| + |-2| + |0| + |2| = 9$,

$i = 2: \sum_{j=1}^{4} |a_{2j}| = |-2| + |-4| + |4| + |0| = 10$, $i = 3: \sum_{j=1}^{4} |a_{3j}| = 6$ и $i = 4: \sum_{j=1}^{4} |a_{4j}| = 8$. Така

$\| A \|_1 = \max\{9, 10, 6, 8\} = 10$.

За втора норма аналогично по стълбове:

$j=1: \sum_{i=1}^{4} |a_{i1}| = |5| + |-2| + |0| + |1| = 8$, $j=2: \sum_{i=1}^{4} |a_{i2}| = 7$, $j=3: \sum_{i=1}^{4} |a_{i3}| = 7$, $j=4: \sum_{i=1}^{4} |a_{i4}| = 11$.

Тогава $\| A \|_2 = \max\{8, 7, 7, 11\} = 11$.

За $\| A \|_3$ по формулата $\| A \|_3 = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 0^2 + 2^2 + \ldots + 6^2} = \sqrt{129} \approx 11.358$.

Отговор: $\| A \|_1 = 10$, $\| A \|_2 = 11$, $\| A \|_3 \approx 11.36$.

2. Условия за сходимост на метода на простата итерация за системи линейни алгебрични уравнения

Както бе казано по-горе, въвеждането на метрика (разстояние) в R^n от вида $d(x,y)=\|x-y\|$ го прави пълно метрично пространство. Валидна е следната важна

Теорема. Достатъчното условие за сходимост на итерационния процес (13)-(14) при произволно начално приближение $x^{(0)}$ е: поне една норма на матрицата C да е по-малка от 1, т.е. да е изпълнено поне едно от следните неравенства:

$$\| C \|_1 = \max_{i=1,n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| < 1, \quad \| C \|_2 = \max_{j=1,n} \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| < 1, \quad \| C \|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2} < 1 .$$

Доказателство. Основава се на теоремата за неподвижната точка. Остава да покажем, кога изображението $x = Cx + d$ е свиващо. Нека $x, y \in R^n$ са два произволни вектора. Тогава

$$d(x,y)=\|x-y\|=\|Cx+d-Cy-d\|=\|Cx-Cy\|=\|C(x-y)\|\leq$$

$$\leq\|C\|\|x-y\|=\|C\|d(x,y)=q.d(x,y).$$

Тук сме означили $q=\|C\|$. Очевидно, изображението е свиващо за $0<q<1$. Твърдението е вярно за всяко начално приближение $x^{(0)}$.

Забележка. За добра сходимост на простата итерация се препоръчва $q<0.5$.

Пример. За системата (16) ще проверим условието за сходимост. Имаме матрицата

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 0.3 \\ -0.2 & 0 & 0.4 \\ -0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пресмятаме $\| C \|_1 = \max_{i=\overline{1,3}} \sum_{j=1}^{3} |c_{ij}| = \max\{0.4,\ 0.6,\ 0.4\} = 0.6 < 1$

$$\| C \|_2 = \max_{j=\overline{1,3}} \sum_{i=1}^{3} |c_{ij}| = \max\{0.4,\ 0.3,\ 0.7\} = 0.7 < 1,$$

$$\| C \|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij}^2} = \sqrt{0.01+0.09+0.04+0.04+0.04+0.16} = \sqrt{0.38} = 0.62 < 1.$$

И трите норми са по-малки от 1. Следователно методът на простата итерация е сходящ. По принцип е достатъчно поне една от нормите да е < 1.

3. Обобщение на метода на простата итерация за системи нелинейни уравнения (СНУ).

Вече дадохме в предишната лекция обобщение на метода на Нютон за СНУ. Да разгледаме обобщение и за проста итерация.

Постановка на задачата. Нека е дадена СНУ $F(x)=0$, във вида:

$$\left| \begin{array}{l} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0 \\ f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0 \\ \qquad\quad \ldots \\ f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0 \end{array} \right., \text{ или във вида: } x=\Phi(x): \left| \begin{array}{l} x_1=\varphi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ x_2=\varphi_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ \qquad\quad \ldots \\ x_n=\varphi_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) \end{array} \right. \qquad (23a,b)$$

Последното представяне е готово за прилагане на метода на простата итерация $x^{(k+1)}=\Phi(x^{(k)})$, $k=0,1,2,\ldots$. Остава да решим въпроса за началното приближение и за условията за сходимост на метода. В частност тези условия са валидни и за системи линейни алгебрични уравнения.

4. Условия за сходимост на метода на простата итерация за системи нелинейни алгебрични уравнения

Записваме подробно итерационния процес $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$, от (23b):

$$\left| \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ \qquad\qquad \dots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{array} \right., \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{24}$$

За да използваме теоремата за неподвижната точка, ще въведем следната метрика (разстояние) между два вектора $x, y \in R^n$:

$$d(x, y) = \|x - y\|_1 = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i| \tag{25}$$

Относно тази метрика R^n е пълно метрично пространство (виж също задачите към Лекция 2 – теорема за н.т.)

Определение. Нека $x^{(0)} \in R^n$, $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ е начален вектор. За избраното разстояние, околност δ на $x^{(0)}$ е *n*-мерен куб с център $x^{(0)}$ и страна δ: $\left\| x - x^{(0)} \right\|_1 = \max\limits_{1 \le i \le n} \left| x_i - x_i^{(0)} \right|$. (26)

Теорема. Нека в δ-околност на $x^{(0)}$ функциите φ_i, $i = 1, \ldots, n$ притежават непрекъснати частни производни $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots n$. Тогава достатъчно условие за сходимост на метода на простата итерация (24) е в тази δ-околност да бъде изпълнено неравенството:

$$q = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \max_{x \in \delta} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} \right| \right\} < 1 . \tag{27}$$

Доказателство. Следва от теоремата за неподвижната точка.

Трябва да докажем, че изображението $\Phi = \left(\varphi_1(x_1,\ldots,x_n), \varphi_2(x_1,\ldots,x_n), \ldots \varphi_n(x_1,\ldots,x_n)\right)$ е свиващо. За целта с помощта на теоремата за средните стойности (Т за ср. ст.) и свойствата на нормите имаме:

$$d\left(\Phi(x),\Phi(y)\right) = \left\|\Phi(x)-\Phi(y)\right\|_1 = \max_{1\le i\le n}\left|\varphi_i(x_1,\ldots,x_n)-\varphi_i(y_1,\ldots,y_n)\right| = \text{(по Т за ср. ст.)}$$

$$= \max_{1\le i\le n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi_i(\xi_i)}{\partial x_j}(x_j-y_j)\right|\right\} \le \max_j\left|x_j-y_j\right|.\max_i\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi_i(\xi_i)}{\partial x_j}\right| \le \tag{28}$$

$$\le \left\|x-y\right\|_1.\max_i\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi_i(\xi_i)}{\partial x_j}\right| = d(x,y).\max_i\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi_i(\xi_i)}{\partial x_j}\right|.$$

От условието за непрекъснатост на частните производни следва, че те са ограничени в δ-околността на $x^{(0)}$. Да означим техните максимуми с M_{ij}, т.е.

$$\left|\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j}\right| \le \max_{x\in\delta}\left|\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j}\right| = M_{ij}, \ \forall x \in \delta, \quad i, j, = 1, \dots, n.$$

Тогава за да имаме свиващо изображение е достатъчно да изберем горната граница на (28) да бъде $q = \max_i \sum_{j=1}^{n} M_{ij} < 1$.

Теоремата е доказана.

Забележка. За добра сходимост на простата итерация се препоръчва $q<0.5$.

<u>Пример</u>:

Да се изследва за сходимост методът на проста итерация за нелинейната система:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right) \\ y = \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \end{cases}.$$

<u>Решение</u>. Тук $\varphi_1(x,y) = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$, $\varphi_2(x,y) = \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$. Намираме частните производни:

$$\frac{\partial\varphi_1(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right), \qquad \frac{\partial\varphi_1(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\frac{\partial\varphi_2(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{4}\sin\left(\frac{x+y}{2}\right), \qquad \frac{\partial\varphi_2(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{4}\sin\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Очевидно $\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| \le \frac{1}{4}$, $\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| \le \frac{1}{4}$ и $\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| \le \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \le \frac{1}{2}$. Същото е и за втората функция $\varphi_2(x,y)$. Следователно $q = \frac{1}{2}$ и методът на простата итерация ще е сходящ.

Остава намирането на начално приближение, което обикновено се постига с помощта на графични методи. Виж темата за нелинейни уравнения: он-лайн обучение: www.fmi-plovdiv.org/evlm - числени методи, програми със система *Mathematica*.